10ο μάθημα
$\boxed{17/12/19}$

Εφαρμογές στη Μαθηματική Φυσική

Σειρές Fourier:

Π.Σ.Τ. :
(1)
$$\begin{cases} y'' = -\lambda y \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases}$$

Τότε λύνοντας το Π.Σ.Τ. θα παίρνουμε ως λύση y_n την σειρά ημιτόνων, δηλ. $y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 1, 2, 3$
οπότε κάθε συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$,

$$c_n = \frac{\langle y_n | f \rangle}{\| y_n \|^2}$$

Π.Σ.Τ. :
(2)
$$\begin{cases} y'' = -\lambda y \\ y'(0) = y'(L) = 0 \end{cases}$$

Τότε θα παίρνουμε ως λύση $y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 0,$
όπου κάθε σειρά $f(x)$, γράφεται

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) , \quad c_n = \frac{\langle y_n | f \rangle}{\| y_n \|^2}$$

μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) , \quad c_0 = \frac{\langle y_0 | f \rangle}{\| y_0 \|^2},$$

$$c_n = \frac{\langle y_n | f \rangle}{\| y_n \|^2}$$

Πληρης σειρά Fourier

Π.Σ.Τ. (3) : $\begin{cases} y'' = -\lambda y \\ y(0) = y(L) \\ y'(0) = y'(L) \end{cases}$

Θέτω $\lambda = k^2$, τότε οι λύσεις θα είναι της μορφής

$$y(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$$

με τις συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 = c_1 \cos kL + c_2 \sin kL = y(L) \\ y'(0) = c_2 \cancel{k} = -c_1 \cancel{k} \sin kL + c_2 \cancel{k} \cos kL = y'(L) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 \cdot (\cos kL - 1) + c_2 \sin kL = 0 \\ c_1 \cdot (-\sin kL) + c_2 \cdot (\cos kL - 1) = 0 \end{cases}$$

Για να έχουμε μη μηδενικές λύσεις:

$$\begin{vmatrix} \cos kL - 1 & \sin kL \\ -\sin kL & \cos kL - 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\cos kL - 1)^2 + \sin^2 kL = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 kL - 2\cos kL + 1 + \sin^2 kL = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos kL = 2 \Leftrightarrow \cos kL = 1$$

$$\Leftrightarrow kL = 2n\pi \Leftrightarrow \boxed{k = \frac{2n\pi}{L}}$$

οπότε το $\boxed{\lambda = k^2 = \frac{4n^2\pi^2}{L^2}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Στην ίδια ιδιοτιμή αντιστοιχούν δύο ιδιοσυναρτήσεις:

$$\begin{cases} y_n^{(1)} = \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \\ y_n^{(2)} = \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται εκφυλισμός

Για τη συγκεκριμένη περίπτωση:

$$\langle y_n^{(1)} | y_n^{(2)} \rangle = \int_0 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0$$

Δηλ. οι δύο ιδιοσυν/σεις είναι ορθογώνιες

άρα $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$

$$a_0 = \frac{\langle y_0^{(1)} | f \rangle}{\| y_0^{(1)} \|^2}, \quad a_n = \frac{\langle y_n^{(1)} | f \rangle}{\| y_n^{(1)} \|^2}$$

$$b_n = \frac{\langle y_n^{(2)} | f \rangle}{\| y_n^{(2)} \|^2}$$

Η μαθηματική θεμελίωση της κβαντομηχανικής βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στη Δ.Ε. του Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$$

H είναι ο διαφορικός τελεστής

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \bar{\nabla}^2 + V(\bar{r}) \qquad V(\bar{r}) = V(x,y,z)$$

δηλ. $$\boxed{i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \bar{\nabla}^2 \Psi + V(\bar{r}) \cdot \Psi}$$

ΜΔΕ $\Psi(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$

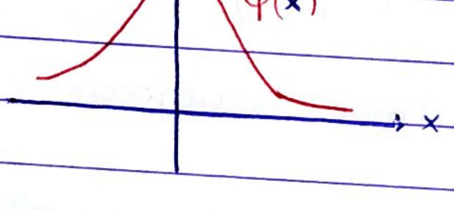
2ης τάξης χρονικές, 1ης τάξης χρονικής

1ου βαθμού, γραμμική, ομογενής

Το δυναμικό $V(\bar{r})$ επιδρά στην κίνηση του στοιχ. σωματιδίου, m, $\hbar$: σταθερά Planck

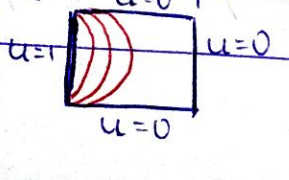
$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad h = 6{,}625 \times 10^{-34}\ Kg \cdot m^2/s$$

φυσικό νόημα: $\Psi(\bar{r}, t)$: κυματοσυν/ση



(παραβολικού τύπου Δ.Σ. + Σ.Σ.

Εξίσ. Laplace: $\bar{\nabla}^2 u = 0$ διάχυση



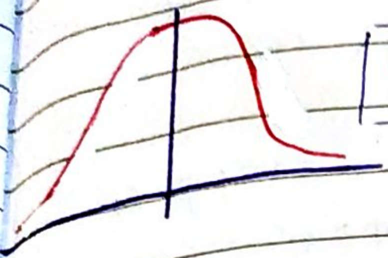
Ελλειπτικού τύπου (Συνοριακές συνθήκες

(1) Σ.Σ. (2 Σ.Σ.)

(2) Α.Σ. (1 Α.Σ.)

Υπερβολικού τύπου $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$$



$\boxed{\begin{array}{l} u(x,0) = f(x) \\ u'(x,0) = f'(x) \end{array}}$

$\boxed{u(x,t) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0}$

$u_t + auu_x + bu_{xxx} = 0$

kdV

$u = sech(x,t)$

άρα Ψ : είναι η πιθανότητα ανά μονάδα όγκου να βρεθεί το σωματίδιο, m, στο συγκεκρ. σημείο, $\bar{r}$, την χρονική στιγμή, t. Δηλ. : $P(\bar{r},t) = |\Psi(\bar{r},t)|^2$,

Φυσικό νόημα: $\Psi(\bar{r},t)$: κυματοσυνάρτηση

Χρειαζόμαστε Α.Σ. κ. Σ.Σ. για να λύσουμε την Δ.Ε. S

Α.Σ. : $\Psi(\bar{r},0) = \Psi_0(\bar{r})$

Σ.Σ. : $\lim\limits_{\bar{r}\to\pm\infty} \Psi(\bar{r},t) = 0$

κ. ισχύει ότι : $\displaystyle\int P(\bar{r},t)\,dV = \int |\Psi(\bar{r},t)|^2\,dV = 1$

συνθήκη κανονικοποίησης

Κλασική Μηχανική	Κβαντομηχανική
Τροχιά : $\bar{r} = \bar{r}(t)$	Κυματοσυνάρτηση $\Psi(\bar{r},t)$
2ος Ν.Ν. :	Εξίσ. S. :
$m\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2} = F(\bar{r}) = -\bar{\nabla}V(\bar{r})$	$i\hbar\dfrac{\partial\Psi}{\partial t} = \left(-\dfrac{\hbar^2}{2m}\bar{\nabla}^2 + V(\bar{r})\right)\cdot\Psi$

Χωρισμός μεταβλητών θέτουμε:

$\psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r})\cdot T(t)$

Τότε: $i\hbar \psi \dot{T} = (H\psi)T \iff i\hbar \cdot \dfrac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \dfrac{H\psi(\vec{r})}{\psi(\vec{r})} = E$ (σταθερά)

συν/ση χρόνου (t) — συν/ση χώρου ($\vec{r}$)

(άρα για να ισχύει η ισότητα πρέπει να είναι μια στθ. E)

η σταθερά χωρισμού παριστάνει την ενέργεια του σωματιδίου. Άρα μπορούμε να γράφουμε:

$$\begin{cases} i\hbar \dot{T}(t) = E\,T(t) & (1) \text{ ΣΔΕ} \\ H\psi = E\psi \iff -\dfrac{\hbar^2}{2m}\cdot\bar{\nabla}^2\psi + V(\vec{r})\cdot\psi = E\psi & (2) \end{cases}$$

(1) $\to \boxed{T(t) = e^{-\frac{iE}{\hbar}\cdot t}}$

(2): Η 2η εξίσωση είναι μια εξίσωση ιδιοτιμών, με τιμή το E, την ενέργεια του σωματιδίου

<u>Παρατήρηση</u>: Το πρόβλημα (2) είναι ένα τυπικό πρόβλ. ιδιοτιμών τύπου S.-L. κ. άρα οι λύσεις του προβλήματ αποτελούν ένα πλήρες σύστημα.

δυναμικό

(2) $\nabla^2\psi + \dfrac{2m}{\hbar^2}(E - V(\vec{r}))\psi = 0 \iff \bar{\nabla}^2\psi + (\varepsilon - u(\vec{r}))\psi = 0$

$\varepsilon = \dfrac{2m}{\hbar^2}\cdot E$, $u = \dfrac{2m}{\hbar^2}$

Περιορ. στη μία διάσταση:

$\psi'' + (\varepsilon - u(x))\psi = 0$

Θεωρούμε ότι $u(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L \\ \infty, & x < 0,\ x > L \end{cases}$

με Σ.Σ.: $\psi(0) = \psi(L) = 0$

Δηλ. εγκλωβίζουμε το σωματίδιο σ' ένα χωρίο

$$\text{Π.Ι.Τ.} : \begin{cases} \psi'' + \varepsilon\psi = 0 \\ \psi(0) = \psi(L) = 0 \end{cases}$$

Η λύση του Π.Ι.Τ. : $\psi(x) = A\sin(\sqrt{\varepsilon}\,x) + B\cos(\sqrt{\varepsilon}\,x)$

Από $\psi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$ κ. $\sin(\sqrt{\varepsilon}\,L) = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{\varepsilon}\,L = n\pi \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{n^2\pi^2}{L^2}}$$

κ. $\psi_n = c\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Παρατήρηση: Ένα κβαντικό σωμάτιο μέσα σ' ένα μονοδιάστατο χωρίο δυναμικού μπορεί να $\exists$ όταν η ενέργειά του παίρνει μία διακριτή ακολουθία τιμών, $\varepsilon_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$.

(Κβάντωση της ενέργειας)

Για να προσδιορίσω το c:

$$\int_0^L |\psi_n|^2\,dx = 1 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

άρα η κυματοσυνάρτηση : $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $n = 1, 2, \dots$

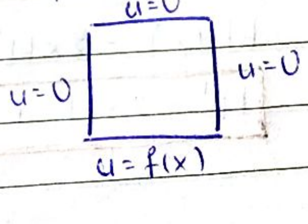
ΑΡΑ: η λύση του S. για σωμάτιο εγκλωβισμένο σ' ένα μοναδικό χωρίο είναι:

$$\psi(x,t) = e^{-\frac{i\varepsilon}{\hbar}t}\sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

HW: Να προσπαθήσω να λύσω:

$\bar{\nabla}^2 u = 0$, $u = u(x,y)$, $\Omega = [0,1] \times [0,1]$

$u(x,y) = u_1(x)\cdot u_2(y)$



ΘΕΜΑ πιθανό